

Оригинальное исследование

УДК 629.12:539.433

DOI: https://doi.org/10.52899/24141437_2025_03_277

EDN: GWFEI

Особенности применения метода парциальных откликов при исследовании вибрации квазиодномерных конечно-элементных моделей

А.Л. Мелконян, Д.А. Николаев

Санкт-Петербургский государственный морской технический университет, Санкт-Петербург, Россия

АННОТАЦИЯ

Актуальность. В настоящее время практически единственным численным методом, позволяющим решать задачи о получении параметров статического деформирования и вибрации сложных конструкций является метод конечных элементов и базирующиеся на его применении пакеты программ в основном зарубежного исполнения. Их применение, как правило, требует существенных трудозатрат по подготовке исходных данных, применения вычислительной техники серьезного уровня, а также финансовых затрат по приобретению пакетов соответствующих программ. Разработка подхода, позволяющего в некоторых случаях минимизировать указанные требования, а также сравнительно просто создать на его основе отечественные расчетные программы, представляется достаточно актуальной.

Цель работы — разработать подходы, позволяющие менее трудозатратно и быстрее рассчитать параметры статического деформирования и связанных изгибно-продольно-крутильных установившихся колебаний (вибрации) конструкций, допускающих моделирование системами квазиодномерных конечно-элементных моделей.

Материалы и методы. В качестве *основного метода* в работе представлен вариант метода парциальных откликов, имеющий ряд существенных преимуществ при решении задач о вынужденных установившихся колебаниях или статическом деформировании конструкций, допускающих моделирование квазиодномерными конечно-элементными моделями. Особенность предлагаемого варианта, названного дискретным вариантом метода парциальных откликов, состоит в записи для вычисления элементов матриц парциальных откликов и парциальных параметров алгебраических уравнений, имеющих рекуррентный характер. При этом традиционное решение краевой задачи заменяется решением ряда задач о сопряжении пар парциальных систем, каждая из которых, с одной стороны, имеет свои краевые условия. Число рассматриваемых пар соответствует числу сечений, в которых исследователь хочет знать параметры исследуемого процесса (амплитуды линейных и угловых смещений, внутренних усилий, опорных реакций). Круг решаемых задач существенно расширяется, если использовать предложенный авторами метод коррекции и (или) модификации характеристик инерции и жесткости элементов квазиодномерной конечно-элементной модели, а также внешней нагрузки, на нее действующей. Такой подход позволяет получать квазиодномерные модели для решения как одномерных, так и многомерных задач, а также задач, в рамках которых требуется учесть влияние дополнительных факторов, усложняющих картину вибрации.

Результаты. В работе приведено несколько примеров применения дискретного варианта метода парциальных откликов в сочетании с методом коррекции и модификации характеристик квазиодномерных конечно-элементных моделей.

Заключение. Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод о достижении поставленной цели, что подтверждается разработкой дискретного варианта метода парциальных откликов, позволяющего для определенного класса конструкций выполнять расчеты параметров деформирования и установившихся колебаний.

Ключевые слова: парциальные отклики и параметры; параметры вибрации; квазиодномерная конечно-элементная модель; квазистатическая аналогия; комплексность параметров; коррекция и модификация.

Как цитировать

Мелконян А.Л., Николаев Д.А. Особенности применения метода парциальных откликов при исследовании вибрации квазиодномерных конечно-элементных моделей // Труды Санкт-Петербургского государственного морского технического университета. 2025. Т. 4, № 3. С. 277–289. DOI: 10.52899/24141437_2025_03_277 EDN: GWFEI

Original Study Article

DOI: https://doi.org/10.52899/24141437_2025_03_277

EDN: GWFEEI

Special Aspects of Using Partial Response Method in Studying Vibration of Quasi-One-Dimensional Finite Element Models

Armen L. Melconian, Dmitry A. Nikolaev

Saint Petersburg State Marine Technical University, Saint Petersburg, Russia

ABSTRACT

BACKGROUND: Today, the finite element method (and software packages based on it, mainly foreign) is substantially the only computational method that actually allows solving parametrization problems of static deformation and vibration of complex structures. They often require much effort to prepare the inputs, advanced computing equipment, and funds to purchase the corresponding software packages. The development of an approach allowing to occasionally reduce the requirements and to relatively easily develop domestic computational software based on it seems quite relevant.

AIM: To develop approaches that allow for less labor-intensive and faster parametrization of static deformation and associated flexural, longitudinal, and torsional steady-state oscillations (vibrations) of structures, allowing modeling by systems of quasi-one-dimensional finite element models.

METHODS: The basic investigation method used in the study is a modification of the partial response method with some significant advantages in solving problems of steady-state forced vibration or static deformation of structures that allow modeling using quasi-one-dimensional finite element models. The proposed method—the discrete modification of the partial response method—consists in the recording of partial responses and recurrent partial parameters of algebraic equations to calculate the matrix entries. In this case, the conventional solution of the boundary value problem is replaced by the solution of a series of conjugation problems for pairs of partial systems, where each has its own boundary data. The number of pairs under consideration corresponds to the number of sections, for which the researcher wants to parametrize the studied process (amplitudes of linear and angular displacements, internal forces, and end reactions). The scope of problems to be solved is significantly expanded by using the method proposed by the authors to correct and/or modify the inertia and rigidity of elements of a quasi-one-dimensional finite element model and the external load acting on it. This approach allows us to build quasi-one-dimensional models for solving both one-dimensional and multidimensional problems and problems requiring to consider the additional factors that complicate the vibration pattern.

RESULTS: The paper presents several applications of the discrete modification of the partial response method in combination with the correction and modification of the parameters of quasi-one-dimensional finite element models.

CONCLUSION: The study allows us to conclude that the aim has been achieved, which is confirmed by the development of a discrete modification of the partial response method, allowing to calculate deformation parameters and steady-state vibrations for a certain class of structures.

Keywords: partial responses and parameters; vibration parameters; quasi-one-dimensional finite element model; quasi-static analogy; complexity of parameters; correction and modification.

To cite this article

Melconian AL, Nikolaev DA. Special Aspects of Using Partial Response Method in Studying Vibration of Quasi-One-Dimensional Finite Element Models. *Transactions of the Saint Petersburg State Marine Technical University*. 2025;4(3):277–289. DOI: 10.52899/24141437_2025_03_277 EDN: GWFEEI

ВВЕДЕНИЕ

Бурное развитие возможностей вычислительной техники, начавшееся во второй половине прошлого века, привело к возможности получения решений задач численными методами. Именно тогда началось широкое применение методов, основанных на *прямом конструировании моделей конструкций из конечных элементов*. Наибольшее развитие и распространение получил метод конечных элементов (МКЭ), как метод, дающий возможность получения модели, наиболее соответствующей реальному объекту, а алгоритм расчета использовал пакеты стандартных программ [1, 2]. Однако применение альтернативных методов в некоторых случаях оказывается достаточно эффективным.

В настоящей статье остановимся на применении метода парциальных откликов (МПО) [3]. Суть метода — любая исследуемая система (в частном случае — механическая) делится на две самостоятельные (парциальные) сопрягаемые части: правую и левую парциальные системы (ПС). Для них вводятся парциальные отклики (ПО) (реакции на единичные воздействия, которые сводятся в матрицу ПО) и парциальные параметры (ПП) (реакции ПС на внешние воздействия, сводящиеся в матрицу-столбец ПП). В точке сопряжения правой и левой ПС записываются уравнения неразрывности, решение которых позволяет сначала найти элементы матрицы-столбца реакций внутренних связей, а затем элементы матрицы-столбца соответствующих смещений. Очевидно, что поскольку на практике требуется находить реакции внутренних связей и соответствующие смещения в конечном числе точек, то необходимо рассмотреть сопряжение соответствующего числа пар ПС. При этом крайне желательно уметь записывать для вычисления ПО и ПП обеих ПС рекуррентные соотношения. Первоначально для получения ПО в работе [3] В.С. Чувиловским предлагалось использовать дифференциальные уравнения или уравнения в конечных разностях.

Особенно удобно применение МПО в частном случае, когда объектом исследования является модель в виде *квазиодномерной конечно-элементной системы*. Такая система удобна при рассмотрении конструкций, один размер которой существенно больше двух других (например, балки, колонны, судовой корпус и т.п.). При вычисленных элементах матриц ПО и ПП в точках сопряжения левой (L) и правой (R) парциальных систем должно выполняться условие неразрывности:

$$\begin{bmatrix} A_{ij}^L & B_{ij}^L \\ C_{ij}^L & D_{ij}^L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_j \\ M_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_i^L \\ \theta_i^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_i \\ \vartheta_i \end{bmatrix} = \\ = - \begin{bmatrix} A_{ij}^R & B_{ij}^R \\ C_{ij}^R & D_{ij}^R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_j \\ M_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_i^R \\ \theta_i^R \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где $\begin{bmatrix} N_j \\ M_j \end{bmatrix}$ — матрица столбец неизвестных внутренних

усилий, а $\begin{bmatrix} w_i \\ \vartheta_i \end{bmatrix}$ — матрица столбец неизвестных линей-

ных и угловых смещений, $i = \tau, n, b; j = \tau, n, b$ — оси естественной системы координат. В (1) нижние индексы у ПО i, j означают, что усилие, ориентированное вдоль оси j , вызывает смещение вдоль оси i ; A_{ij}, C_{ij} — линейные смещения вдоль оси i от единичной силы $N_j = 1$ и единичного момента $M_j = 1$, соответственно; B_{ij}, D_{ij} — угол поворота вокруг оси i от единичной силы $N_j = 1$ и единичного момента $M_j = 1$, соответственно; W_j, θ_j — линейное смещение и угол поворота относительно оси j от всей внешней нагрузки, действующей на соответствующую ПС.

Уравнение (1), как уже говорилось, позволяет в точке сопряжения сначала найти элементы матрицы внутренних усилий, а затем элементы матрицы линейных и угловых смещений.

Для плоской модели рекуррентные зависимости вычисления ПО и ПП при наращивании парциальных систем на подэлементы базовых элементов, получаемые с применением дискретного варианта МПО приведены в работах [4, 5]. Его суть состоит в *записи для изменения ПО алгебраических уравнений, носящих рекуррентный характер*. Для общего случая формулы выводятся из аналогичных физических соображений, но имеют существенно более сложную структуру. При желании с ними можно ознакомиться в [6, 7].

КВАЗИОДНОМЕРНАЯ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ МОДЕЛЬ

На первом этапе работы при решении задач о моделировании процесса вынужденных установившихся колебаний квазиодномерной дискретной системы, представляющей собой цепочку последовательно соединенных однотипных конечных элементов, которые ниже будем называть «базовыми», была предложена физическая модель в виде пространственно-криволинейной упругой дискретной системы (ПКУДС).

Устройство базового элемента представлено на рис. 1. Здесь изображены четыре безинерционных стержня; пары крайних соединены двумя обобщенными шарнирами деформаций, позволяющим смещения и повороты относительно трех ортогональных осей, а между средними возможны три последовательных поворота осей местной системы координат элемента; заканчивается базовый элемент инерционным диском, обладающим тензором инерции (при этом, к диску в заданных точках могут быть дополнительно прикреплены точечные массы жестко или на упругих связях, допускающих движение только вдоль одной из координатных осей). В случае наличия

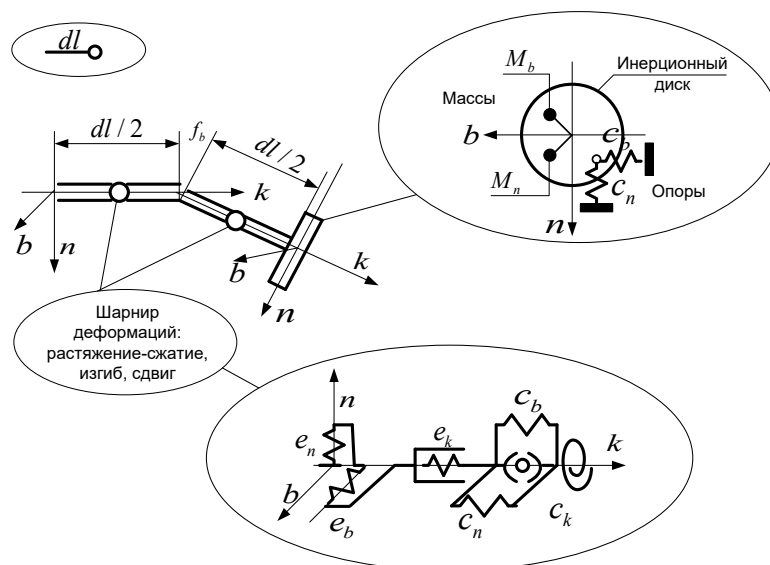


Рис. 1. Устройство «базового» элемента пространственно-криволинейной упругой дискретной системы.

Fig. 1. Layout of the basic element of a curvilinear-space elastic discrete system.

у элемента опоры, обладающей заданными жесткостями в определенных направлениях, действие ее реакций также приводится к соответствующей точке инерционного диска (см. рис.1). Выбранная геометрия обусловлена тем, что криволинейные участки заменяются описывающей ломаной, к которой инерционные диски ортогональны.

Материал модели предполагается линейно-упругим, но с введением в него неупругих сопротивлений комплексностью инерционно-жесткостных характеристик [1, 3, 4, 6]; при этом внутренние сопротивления, пропорциональные деформациям и (или) их скоростям (т.е. относительным параметрам) корректируют жесткости в шарнире деформаций (т.е. вызывают появление у их величин мнимой части), а внешние сопротивления (пропорциональные абсолютным скоростям) — корректируют соответствующие инерционные характеристики (т.е. вызывают появление у их величин мнимой части). Ввиду малости деформаций и перемещений при вибрации задача решается в геометрически линейной постановке. В качестве основной кинематической гипотезы, позволяющей свести задачу теории упругости к задаче строительной механики, принята гипотеза плоских сечений с поправкой на сдвиг.

Внешняя динамическая нагрузка на рассматриваемую линейную модель в виде ПКУДС предполагается периодической. Она может быть представлена гармоническим рядом. Действие каждой гармоники рассматривается отдельно, а общее решение получается суперпозицией частных решений. Такой подход обусловлен тем, что величины присоединенных масс жидкости зависят от формы вынужденных колебаний рассчитываемой конструкции, которая, в свою очередь, изменяется с изменением частоты возбуждения. Прикладываемая внешняя нагрузка в виде сосредоточенных или распределенных сил и моментов автоматически приводится к центрам инерционных дисков элементов.

Анализ параметров установившихся колебаний позволяет перейти к квазистатическому варианту модели [1, 3, 4, 6]. В этом случае модель также представляет собой последовательность базовых элементов, но вместо инерционного диска (см. квазистатическую аналогию в [1, 3, 4, 6]) вводится опора, обладающая отрицательной упругостью, т.е. новая модель представляет собой последовательность абсолютно твердых и безынерционных элементов, соединенных между собой и неподвижным основанием упругими связями, каждая из которых порождает усилия определенной структуры (пропорциональные смещению, скорости, ускорению). При этом характеристики жесткости могут быть комплексными величинами (см. метод комплексных параметров в [1, 3, 4, 6]). В частном случае, когда частота колебаний равна нулю, имеет место статический расчет параметров деформирования квазиодномерной модели.

Особенно удобно такое представление конструкций на ранних стадиях их проектирования [8] (например, для судового корпуса), когда о них еще нет полных данных, что затрудняет применение классического метода конечных элементов.

Цель, которую ставили перед собою авторы состоит в создании достаточно простой и физически понятной модели для расчета параметров вибрации таких конструкций и, вместе с тем, соответствующих алгоритма и программы расчета, вычисления по которым могут быть выполнены на персональных компьютерах пользователей с высокой скоростью.

АЛГОРИТМ И ПРОГРАММА РАСЧЕТА

В качестве математического метода, принятого при разработке алгоритма расчета и программы вычислений

параметров деформации квазистатического варианта одноичной модели, был выбран метод парциальных откликов (МПО) в его дискретном варианте [4–7]. Выбранный подход позволил избежать традиционного решения краевой задачи, представляющего собой, на взгляд авторов, существенно более сложный и трудоемкий процесс. Выбор в качестве ПО смещений от единичных усилий соответствует причинно-следственным связям в задачах строительной механики, что гарантирует, при соответствующем построении алгоритма расчета, соответствие устойчивости результатов вычислений и устойчивости моделируемого процесса [3].

По предложенному в [7] алгоритму для пространственной квазиодномерной конечно-элементной модели были разработаны алгоритм и первый вариант расчетной программы «Рамы» [9], позволивший, во-первых, достаточно просто создавать либо одиночную пространственно-криволинейную квазиодномерную конечно-элементную модель, либо систему из нескольких таких моделей, связанных между собой в нескольких точках специальными шарнирами. В свою очередь, каждая из квазиодномерных конечно-элементных моделей представляет собой последовательность из прямолинейных и (или) криволинейных участков. Каждый из таких участков состоит из задаваемого исследователем числа последовательно соединенных базовых элементов. Инерционно-жесткостные характеристики базовых элементов в пределах участка могут быть либо одинаковыми, либо меняться по трапецевидному закону. Величины этих характеристик могут либо задаваться исследователем вручную, либо вычисляться встроенным в программу модулем для профиля, входящего в предлагаемую программой базу либо нарисованного исследователем. Для каждого участка предусмотрена возможность введения в заданной точке опоры с задаваемыми жесткостями в нужных направлениях, а также сосредоточенных сил, моментов и распределенной нагрузки. Для каждого инерционного диска предусмотрена возможность прикрепления жестко либо на упругой связи точечной массы. Все эти параметры конечно-элементной модели могут быть откорректированы даже после того, как модель сформирована.

Во-вторых, для сформированной модели программа позволяет рассчитать амплитуды параметров вибрации (линейные и угловые смещения, внутренние силы и моменты, опорные реакции) каждого из базовых элементов. Распределения этих параметров вдоль нейтральной оси модели выводятся на экран и сохраняются в файл. В окне

справа указываются максимальные значения этих параметров. При необходимости построения амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) в окне программы нажимается кнопка с изображением зигзага. Анализ АЧХ позволяет определить резонансные частоты и совпадающие с ними частоты, соответствующих типов собственных колебаний (изгибных в горизонтальной и вертикальной плоскостях, продольных, крутильных).

Следует заметить, что исследователь должен помнить, что если модель и внешняя нагрузка, на нее действующая, обладают свойством симметрии, то у нее не могут реализоваться резонансы, соответствующие четным собственным частотам, а если модель и внешняя нагрузка антисимметричны, не могут быть реализованы резонансы, соответствующие нечетным собственным частотам. Таким образом, чтобы найти все собственные частоты модели, необходимо корректно задать внешнюю нагрузку.

В качестве иллюстрации вывода рекуррентных выражений в рамках дискретного варианта МПО для ПО и ПП ниже приведено их получение для плоской задачи об изгибной вибрации непризматической балки.

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ИЗГИБНОЙ ВИБРАЦИИ МЕТОДОМ ПАРЦИАЛЬНЫХ ОТКЛИКОВ

Рассмотрим одномерную конструкцию из [10] длины L , для которой известны граничные условия и распределения вдоль ее продольной оси x массы $m^*(x)$, жесткости на изгиб $E \cdot J(x)$, жесткости упругого основания $c(x)$ и внешних гармонически изменяющихся во времени поперечной силовой $q(x) \sin \omega t$ и моментной $\mu(x) \sin \omega t$ нагрузок.

Если конструкцию мысленно рассечь на две части в сечении с координатой x , то внутренними параметрами процесса ее изгибной вибрации будут смещение поперечного сечения $w(x)$, угол поворота этого поперечного сечения $\vartheta(x)$, поперечная сила $N(x)$ и изгибающий момент $M(x)$.

Сконструируем дискретную расчетную модель для исследования изгибных установившихся колебаний конструкции как совокупность из n однотипных последовательно соединенных элементов, состоящих из масс, шарнирно соединенных абсолютно жестких стержней и безынерционных линейных и спиральных пружин (см. рис. 2); на каждую из масс действуют внешние

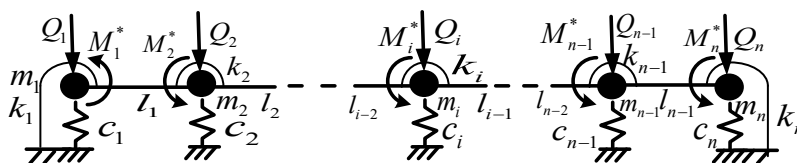


Рис. 2. Вид конечно-элементной модели.
Fig. 2. View of a finite element model.

гармонически изменяющиеся во времени поперечная сила и изгибающий момент.

Характеристики элементов такой дискретной модели определяются как

$$l_i = \frac{L}{n-1}, \quad k_i = EJ_i \frac{l_{i-1} + l_i}{2}, \quad c_i = c_i^* \frac{l_{i-1} + l_i}{2},$$

$$m_i = m_i^* \frac{l_{i-1} + l_i}{2}, \quad Q_i = q_i \frac{l_{i-1} + l_i}{2}, \quad M_i^* = \mu_i \frac{l_{i-1} + l_i}{2},$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

где L — протяженность конструкции, $l_i, m_i, k_i, c_i, Q_i, M_i^*$ — протяженность, масса, изгибная жесткость, жесткость основания, внешняя сила и изгибающий момент для i -го элемента, соответственно. Очевидно, что при увеличении числа элементов дискретная модель неограниченно стремится к исходной конструкции. При этом граничные условия и наличие промежуточных опор должны быть учтены коррекцией значений жесткости соответствующих линейных и спиральных пружин (например, жесткая опора может моделироваться пружиной, жесткость которой превышает остальные на 5–7 порядков).

При наличии заданных коэффициентов внешних и внутренних сопротивлений массы и жесткости пружин дискретной модели будут комплексными величинами. Если внешние усилия, на нее действующие, будут содержать слагаемые, содержащие как $\sin \omega t$, так и $\cos \omega t$, их также следует записать в комплексной форме. В таком случае параметры процесса вибрации также станут комплексными величинами.

Применив квазистатическую аналогию, получим расчетную схему в виде безынерционной модели (см. рис. 3), для которой следует определить параметры статического деформирования.

На рис. 3 введены обозначения: $u_i = -\omega^2 m_i$ — жесткость i -й опоры, Q_i, M_i^* — амплитудные значения внешних поперечных сил и изгибающих моментов, приложенных в i -м шарнире безынерционной модели. Вид i -го элемента с обозначением параметров его деформирования изображен на рис. 4.

Для нахождения параметров деформированного состояния безынерционной модели воспользуемся методом парциальных откликов в его дискретном варианте.

Введем следующий комплект ПО и ПП для левой части безынерционной системы, оканчивающейся i -м узлом:

- $A_{nn}(i)$ — поперечное смещение ее крайнего узла справа от действия единичной поперечной силы $N=1$;
- $B_{bn}(i)$ — угол поворота поперечного сечения в ее крайнем узле справа от действия единичной поперечной силы $N=1$;
- $C_{nb}(i)$ — поперечное смещение ее крайнего узла справа от действия единичного изгибающего момента $M=1$;
- $D_{bb}(i)$ — угол поворота поперечного сечения в ее крайнем узле справа от действия единичного изгибающего момента $M=1$;
- $W(i)$ — поперечное смещение ее крайнего узла справа от действия всей внешней нагрузки, приложенной к левой парциальной системе;
- $\theta(i)$ — угол поворота поперечного сечения в ее крайнем узле справа от действия всей внешней нагрузки, приложенной к левой парциальной системе.

Отметим, что введенные шесть коэффициентов полностью и однозначно определяют свойства левой парциальной системы.

Запишем алгоритм получения величин ПО и ПП по мере наращивания левой парциальной системы от первого узла до n -го (алгоритм, так называемого, «прямого хода»).

В соответствии с основной идеей метода парциальных откликов вычисление искомых коэффициентов податливостей будем производить последовательно не только от одного базового элемента модели к другому, но и внутри каждого базового элемента. При этом сначала вычисляются коэффициенты податливости до узловой точки (проход стержня длиной l_i). Затем осуществляется проход вертикальной опоры жесткостью $(c_i + u_i)$. После чего проходит шарнир деформации, жесткость спиральной пружины которого k_i . Далее осуществляется приложение внешней нагрузки в виде силы Q_i и момента M_i^* . Парциальные отклики и парциальные параметры после прохода каждого этапа будут снабжаться сверху дополнительным штрихом.

При выводе формул примем следующее правило знаков: положительное направление для силы и вертикального смещения — вниз по вертикали, положительное направление для момента и угла поворота поперечного сечения — против часовой стрелки (см. рис. 4).

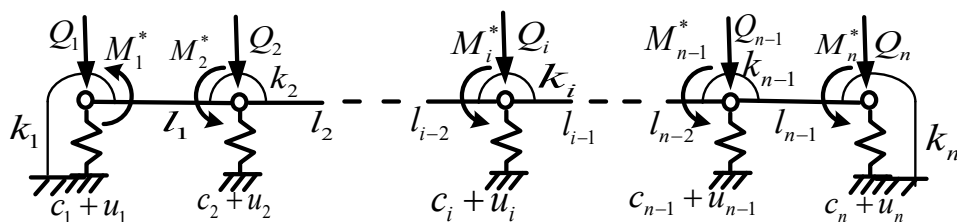


Рис. 3. Вид квазистатической конечно-элементной модели.

Fig. 3. View of a quasi-static finite element model.

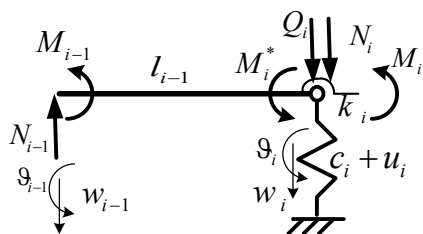


Рис. 4. Вид «базового» элемента квазистатической модели.
Fig. 4. View of the basic element of the quasi-static model.

Перейдем к непосредственному получению рекуррентных зависимостей для коэффициентов податливостей. Сначала вычислим искомые коэффициенты для первого узла модели:

$$\begin{aligned} A_{nn} &= \frac{1}{c_1 + u_1}, \quad C_{nb} = B_{bn} = 0, \quad D_{bb} = \frac{1}{k_1}, \\ W &= \frac{Q_1}{c_1 + u_1}, \quad \theta = \frac{M_1^*}{k_1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Схема для вычисления ПО и ПП при наращивании левой парциальной системы стержнем длины $l = l_i$ при приложении единичной поперечной силы изображена на рис. 5

В качестве примера для схемы, представленной на рис. 5, приведены выражения для ПО и ПП:

$$\begin{aligned} A'_{nn} &= A_{nn}N + C_{nb}M - l(B_{bn}N + D_{bb}M) = \\ &= A_{nn} - C_{nb}l - B_{bn}l + D_{bb}l^2; \\ B'_{bn} &= B_{bn}N + D'_{bb}M = B_{bn} - D'_{bb}l; \\ C'_{nb} &= C_{nb}M - D'_{bb}Ml = C_{nb} - D'_{bb}l; \\ D'_{bb} &= D_{bb}M = D_{bb}; \quad W' = W - \theta l; \quad \theta' = \theta. \end{aligned} \quad (3)$$

При выводе этих зависимостей учитывалось, что приложение единичного усилия $N=1$ вызывает появление в предыдущем сечении такого же реактивного усилия $N=1$ и момента $M=-lN=-l$. Кроме того, прогиб в рассматриваемом сечении формируется не только прогибом в предыдущем сечении, но и дополнительным прогибом от угла поворота стержня.

Рассуждения для получения выражений для ПО и ПП при приложении единичного момента и внешней нагрузки аналогичны приведенным выше.

На следующем этапе учтем изменение ПО и ПП при прохождении упругой опоры жесткостью $c = c_i + u_i$. Для этого необходимо раскрыть своеобразную «статическую неопределенность», возникающую из-за появления реакции связи (см. рис. 6). Для упрощения записи верхний штрих у ПО и ПП опущен. ПО и ПП после прохода упругой опоры снабжены сверху двумя штрихами.

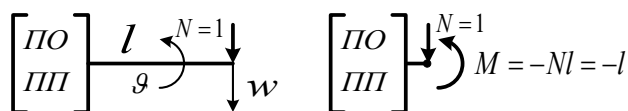


Рис. 5. Схема для вычисления ПО при приложении единичной силы.
Fig. 5. Partial response calculation diagram (unit force is applied).

На рис. 6 изображена схема, позволяющая записать выражений для ПО и ПП при приложении единичной поперечной силы.

В качестве примера приведем нахождение ПО для схемы, изображенной на рис. 6:

$$\begin{aligned} w &= \frac{R_1}{c} = A_{nn}(N - R_1), \\ R_1 &= \frac{cA_{nn}}{1 + cA_{nn}}. \end{aligned} \quad (4)$$

отсюда

Тогда

$$\begin{aligned} A''_{nn} &= \frac{R_1}{c} = \frac{A_{nn}}{1 + cA_{nn}}, \\ B''_{bn} &= B_{bn}(N - R_1) = B_{bn}(1 - R_1). \end{aligned} \quad (5)$$

Рассуждая аналогично, получим формулы для вычисления соответствующих ПО при ПП.

На следующем этапе парциальную систему следует нарастить шарниром деформаций (спиральной пружиной жесткостью k_i), что приведет к изменению только одного парциального отклика:

$$D'''_{bb} = D''_{bb} + \frac{1}{k_2}. \quad (6)$$

На последнем этапе, в соответствии с рис. 4, следует приложить внешнюю нагрузку. Очевидно, что парциальные отклики при этом изменяться не будут, изменяются только парциальные параметры (новые значения имеют сверху три штриха). Убрав для упрощения записи верхние штрихи у ПО и ПП, получим:

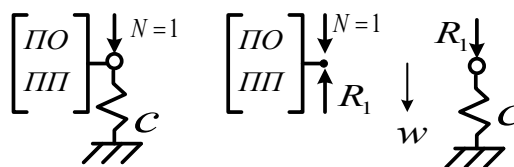


Рис. 6. Схема для вычисления парциальных откликов при приложении единичной силы.
Fig. 6. Partial response calculation diagram (unit force is applied).

$$W''' = W + A_{nn}Q_i + C_{nb}M_i^*;$$

$$\theta''' = \theta + B_{bn}Q_i + D_{bb}M_i^*. \quad (7)$$

Продемонстрированные выше приемы позволяют получить полный комплект рекуррентных зависимостей, необходимых для перехода от одного элемента к другому и, как следствие, от одного участка к другому (наращивание левой парциальной системы до включения в нее стержня длиной $l = l_{n-1}$).

Приведенные выше формулы для коэффициентов податливости относятся, строго говоря, лишь к левой парциальной системе. Но, как показано в [5, 7], ими можно условно пользоваться и для правой парциальной системы, если надлежащим образом записать условия сопряжения обеих систем.

УЧЕТ ВЛИЯНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ФАКТОРОВ, ВЛИЯЮЩИХ НА КАРТИНУ ВИБРАЦИИ

В [11, 12] сформулирован и применен подход, позволяющий учитывать влияние дополнительных факторов, усложняющих картину установившихся колебаний квазиодномерной модели. На первом этапе подхода выполняется анализ влияния рассматриваемого фактора на модель (т.е. выявляется структура дополнительных усилий, порождаемых учетом этого фактора). На втором этапе дополнительные усилия условно разделяются на группы следующим образом:

1. Выделяются слагаемые первой группы, которые можно учесть коррекцией внешней нагрузки, прикладываемой к элементам квазистатической модели.
2. Ко второй группе относят слагаемые, прямо пропорциональные абсолютным смещениям, скоростям или ускорениям элементов модели, действие которых можно учесть коррекцией характеристик инерции этих элементов. Так зависимость дополнительного усилия от абсолютной скорости удобнее выполнить комплексностью характеристик инерции элементов, а зависимость от абсолютного ускорения (смещения) — отрицательностью (положительностью) величин соответствующих инерционных характеристик. Действие таких слагаемых приведет к коррекции жесткостей опор «базового» элемента квазистатической модели.
3. К третьей группе относят слагаемые, прямо пропорциональные абсолютным смещениям, скоростям или ускорениям, действие которых можно учесть модификацией характеристик инерции квазиодномерной модели (иными словами — оснастить модель новыми, ранее отсутствовавшими у нее, свойствами). Действие таких слагаемых приведет к введению в «базовый» элемент квазистатической модели дополнительных упругих опор, автоматически порождающих соответствующие усилия.

4. К четвертой группе относят слагаемые, прямо пропорциональные относительным смещениям или скоростям; их действие удобнее учесть при выводе формул для вычисления парциальных откликов.
5. К последней группе относим слагаемые, формализовать структуру которых способами, указанными выше, не удалось.

На третьем этапе выполняется учет влияния слагаемых каждой из перечисленных групп. Применение такого подхода позволяет при решении задачи вместо рассмотренной выше квазиодномерной конечно-элементной модели получить вариант новой, модифицированной квазиодномерной конечно-элементной модели, представляющей собой уже не модель конструкции, а модель задачи в целом. Заметим, что учет слагаемых пятой группы может быть выполнен методом последовательных приближений. Ниже применение этого подхода иллюстрируется при рассмотрении решений ряда задач прикладного характера.

УЧЕТ СОВМЕСТНОЙ ВИБРАЦИИ ОСНОВНОЙ НЕСУЩЕЙ КОНСТРУКЦИИ И КОНСТРУКТИВНОГО МОДУЛЯ (КМ) С МАЛЫМ РАЙОНОМ СОПРЯЖЕНИЯ

В работе [13] была решена задача о совместной вибрации судового корпуса (основная несущая конструкция) и поля днищевого перекрытия (простейший КМ в виде массы на упругой связи с приложенной вертикальной гармонически изменяющейся силой), сопрягающихся в одной точке. Задача решалась методом последовательных приближений, когда на первом этапе рассчитывались параметры вибрации судового корпуса без влияния присоединения КМ. Затем решались задачи о вибрации КМ при единичном кинематическом возбуждении точки сопряжения и вибрации КМ под действием приложенной к нему внешней нагрузки; эти решения позволяли вычислить значения соответствующих реакций в точке сопряжения моделей. На втором этапе эти реакции прикладывались в точке сопряжения к модели судового корпуса и выполнялся расчет параметров вибрации судового корпуса во втором приближении. Приближения выполнялись до тех пор, пока параметры вибрации судового корпуса в двух последних приближениях не совпадали с точностью, устраивающей исследователя.

Формулирование подхода [11] позволило в работе [14] для решения более общей (многомерной) задачи о совместной вибрации основной несущей конструкции и КМ общей конфигурации (для обеих конструкций применялись квазиодномерные конечно-элементные модели) предложить новую, единую, квазиодномерную конечно-элементную модель, «базовый» элемент которой в точке сопряжения был модифицирован так, что учитывал новые инерционные свойства,

обусловленные присоединением КМ. Таких свойств у исходной модели основной несущей конструкции не было (например, изгибные колебания вызывали появления продольных колебаний и т.п.). Кроме этого, к модифицированной модели основной несущей конструкции в точке сопряжения с КМ прикладывался комплекс внешних усилий, обусловленных внешними усилиями, приложенными к КМ. Естественно, что величины этих инерционных характеристик и, так называемых, «приведенных» усилий были функциями частоты вибрации.

Заметим, что в рамках такого подхода создаваемая модель уже не является моделью какой-либо конструкции, а оказывается моделью общей задачи, учитывающей взаимовлияние исходных моделей. Таким образом подход, предложенный в [11], позволил вместо многомерной задачи о совместной вибрации получить квазиодномерную задачу, модель, алгоритм и программу расчета параметров, вибрации которой незначительно усложнили алгоритм и программу расчета для модели из базовых элементов, изображенных на рис. 1.

УЧЕТ ВРАЩЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ

Проиллюстрируем реализацию предложенного выше подхода [11] в процессе решения задачи из [15] об установившихся колебаниях, возникающих при вращении с постоянной угловой скоростью Ω судового валопровода с установленным гребным винтом. Для достаточно жестких валов (надводные корабли, подводные лодки и т.п.) в расчетах вибрации общепринята модель в виде непризматической балки; при этом нейтральная ось такой модели совершает установившиеся колебания с частотой вынуждающего воздействия ω относительно своего начального положения; в общем случае указанные частоты могут не совпадать из-за наличия воздействия со стороны иных судовых конструкций.

Будем полагать движение валопровода сложным, состоящим из относительного движения (вращение конструкции с угловой скоростью Ω вокруг своей нейтральной оси) и переносного движения (установившиеся колебания с частотой ω вместе с нейтральной осью относительно ее начального положения). Для перехода к квазистатической постановке задачи воспользуемся методом кинетостатики [16], добавив к внешним силам, действующим на элементы конструкции, силы инерции переносного движения, силы инерции относительного движения и силы инерции Кориолиса. Линейность задачи позволяет рассмотреть независимое действие на конструкцию всех этих видов нагрузки, а общее решение задачи получить в виде суперпозиции решений; при этом каждое из решений может быть получено в наиболее удобной координатной системе.

В наиболее распространенном случае, когда поперечное сечение валопровода представляет собой

совокупность концентрических окружностей, имеют место две особенности, существенно упрощающие решение задачи. Первая из них, обусловленная совпадением центров инерции и жесткости поперечных сечений, приводит к отсутствию инерционных нагрузок относительного движения, а вторая, обусловленная одинаковой жесткостью на изгиб в любом направлении — позволяет искать параметры движения в неподвижной (не вращающейся) координатной системе. Если усилиями, вызывающими вибрацию, являются инерционные усилия, обусловленные неуравновешенностью гребного винта (поворачивающаяся с постоянной угловой скоростью Ω вокруг нейтральной оси сила $Q_0 = m\Omega^2 e$, где m — масса винта, а e — ее эксцентриситет, и изгибающий момент $M = I_0\Omega^2$, обусловленный центробежным моментом инерции I_0), то их действие может быть учтено [11, 12] коррекцией внешней нагрузки, прикладываемой к квазистатической модели. В неподвижной координатной системе действие такой силы эквивалентно приложению комплексной силы $\bar{Q} = Q_0 \sin \Omega t + iQ_0 \cos \Omega t$, где $i = \sqrt{-1}$; действие изгибающего момента учитывается аналогично. Для выполнения такого расчета можно воспользоваться первым вариантом программы [9].

Если на модель действуют дополнительные усилия, гармонически изменяющиеся во времени с частотой ω , то решение задачи будет представлять собой суперпозицию решений. Первое из них должно учитывать силы, возникающие вследствие неуравновешенности гребного винта (алгоритм решения предложен выше), а второе — действие на элементы модели дополнительной нагрузки, — сил инерции переносного движения (происходящего вместе с нейтральной осью модели) и сил инерции Кориолиса. Заметим, что действие на элементы модели нагрузки первых двух типов может быть учтено при непосредственном использовании модели и первого варианта программы [8, 9]. Автоматический учет действия сил инерции Кориолиса потребует некоторой модификации используемой ранее модели (т.е. ее оснащение дополнительными свойствами).

Учет сил инерции Кориолиса можно осуществить приложением к элементу «винт» модели валопровода соответствующих составляющих гироскопического момента $\bar{M}^{sup} = I_\tau \bar{\Omega} \times \bar{\mathcal{Q}}$, которым мы пренебрегали прежде, полагая винт не вращающимся. При этом $I_\tau = 2I$ — осевой момент инерции масс винта относительно оси τ (ось вращения винта) при $I = I_a = I_b$, $\bar{\Omega}$ — вектор угловой скорости вращения винта, $\bar{\mathcal{Q}}$ — вектор угловой скорости переносного вращения (угловой скорости прецессии).

Рекомендации по коррекции инерционно-жесткостных характеристик модели, сформулированные выше, позволяют учесть действие таких усилий появлением у модели новых инерционных свойств, а именно: угловая скорость поворота вокруг главной нормали (бинормали) должна порождать момент, направленный в направлении, противоположном бинормали (совпадающем с главной

нормалью). Заметим, что вращение винта с угловой скоростью Ω вокруг продольной оси τ по часовой стрелке приведет к смене знака этих моментов.

На следующем этапе решения эти дополнительные инерционные свойства будут учтены добавлением на элементе квазистатической модели «винт» упругих связей (спиральные пружины), порождающих соответствующие усилия. Жесткости этих связей должны быть величинами мнимыми (т.к. реактивный момент такой связи пропорционален не углу поворота, а скорости его изменения) и равными: $c_{bn} = 2I\omega\Omega$ — жесткость пружины, порождающей момент в направлении, противоположном бинормали, величина которого пропорциональна углу поворота относительно главной нормали; $c_{nb} = -2I\omega\Omega$ — жесткость пружины (отрицательная), порождающей момент в направлении главной нормали, величина которого пропорциональна углу поворота относительно бинормали.

В таком случае алгоритм расчета из [7] следует дополнить комплектом формул из [15], учитывающим изменение парциальных откликов (ПО) и парциальных параметров (ПП) при прохождении этих опор. Очевидно, что такой вывод аналогичен рассмотренному выше.

Для предложенной модели был написан алгоритм расчета на базе дискретного варианта МПО и разработана программа расчета «Винт», подпрограммой которой служила модернизированная программа [9]. Расчеты, выполненные по указанной программе, подтвердили появление у вала с вращающимся винтом эффектов из [17] (прямая и обратная прецессии и т.п.). Рамки настоящего пособия не позволяют более подробно остановиться на обсуждении этого достаточно сложного явления, однако желающие могут ознакомиться с ним в [17].

ВЛИЯНИЕ ПРОДОЛЬНОЙ СЖИМАЮЩЕЙ КВАЗИСТАТИЧЕСКОЙ СИЛЫ

Как уже было сказано выше, влияние слагаемых четвертой группы может быть учтено непосредственно при выводе формул для ПО и ПП. В качестве первого опыта такого учета в работах [4, 5] был выполнен учет влияния на параметры вибрации плоской квазистатической конечно-элементной модели квазистатической продольной силы. Структуру дополнительных усилий, индуцируемых постоянной по величине и направлению продольной сжимающей силы T , действующей на элемент модели длиной ds , можно записать, рассмотрев рис. 7.

При малых деформациях действие этой силы на элемент модели вызывает появление изгибающего момента, включающего две составляющие, т.е.

$$M^T = M_1^T + M_2^T = T \left[\frac{N_n}{GF} - \vartheta \right] ds. \quad (8)$$

Его первая составляющая M_1^T обусловлена деформацией сдвига от внутренней перерезывающей силы N_n

(GF — жесткость элемента на сдвиг), а составляющая M_2^T обусловлена деформацией изгиба элемента на угол ϑ . На рис. 4 пунктирными линиями изображено положение элемента при изгибе, а сплошными линиями — его положение с учетом сдвига. Очевидно, что M_1^T стремится уменьшить угол изгиба элемента и увеличить его поперечное смещение, а M_2^T стремится увеличить угол изгиба и уменьшить поперечное смещение элемента. При этом, принято следующее правило знаков: поперечное смещение и поперечная сила положительны при направлении вниз, а угол поворота и изгибающий момент положительны в направлении поворота по часовой стрелке.

Заметим, что статическое действие продольной силы должно быть учтено предварительно при расчете положения линии отсчета.

При переходе к дискретной конечно-элементной модели структуры этих дополнительных моментов будут за-

писаны как $M_1^T = T \frac{N_n}{e_n}$, где e_n — жесткость конечного

элемента на сдвиг, и $M_2^T = Tl\vartheta$, где l — длина конечного элемента. Действие изгибающего момента M_1^T , пропорционального внутренней силе N_n , выполним непосредственно при выводе формул ПО, учитывающих проход обобщенного шарнира деформаций, допускающего сдвиг, растяжение-сжатие и изгиб:

$$\begin{aligned} A'_{\tau\tau} &= A_{\tau\tau} + \frac{1}{e_\tau}, & A'_{\tau n} &= A_{\tau n} + \frac{T}{e_n} C_{\tau b}, \\ A'_{nn} &= A_{nn} + \frac{1}{e_n} (1 + TC_{nb}), \\ B'_{bn} &= B_{bn} + \frac{T}{e_n} D_{bb}, & D'_{bb} &= D_{bb} + \frac{1}{k}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь нижние индексы $i; j$ у ПО означают, что единичное усилие, ориентированное вдоль оси j вызывает

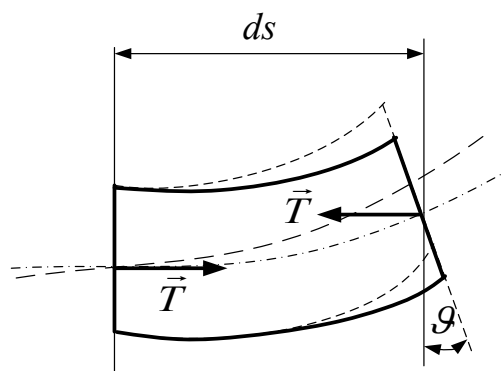


Рис. 7. Схема действия квазистатической сжимающей силы на элемент модели.

Fig. 7. Action diagram of a quasi-static compressive force on a model element.

смещение вдоль оси i , например, $A_{\tau n}$ — линейное смещение вдоль оси τ от единичной силы, направленной вдоль оси n ; $C_{\tau b}; C_{nb}$ — линейное смещение вдоль оси τ (n) от единичного момента, направленного вдоль оси b ; B_{bn} — угол поворота вокруг оси b от единичной силы, направленной вдоль оси n ; D_{bb} — угол поворота вокруг оси b от единичного момента, направленного вдоль оси b ; e_{τ} — жесткость конечного элемента на растяжение-сжатие, а k — жесткость элемента на изгиб. Верхний штрих отражает выполнение прохода через шарнир деформаций.

Действие отрицательного изгибающего момента M_2^T , пропорционального абсолютному значению угла поворота элемента вокруг оси b , выполним, в соответствии с [11], коррекцией момента инерции масс, определяющего инерцию вращения элемента вокруг оси b . Ранее для квазистатической модели ПКУДС это усилие порождала опора в виде пружины отрицательной жесткости, равной $u_b = -I_b \omega^2$, где I_b — момент инерции масс элемента относительно бинормали b , а ω — частота вибрации; теперь жесткость такой опоры следует *откорректировать* и принять равной $u_b^* = -(I_b \omega^2 + Tl)$. Комплект формул для прохода такой опоры приведен в [5].

Заметим, что учет продольной квазистатической силы дал возможность не только оценить ее влияние на параметры вибрации [18], но и найти предельные значения сжимающей силы, при которой квазиодномерная модель теряет устойчивость. Очевидно, что при $\omega = 0$ мы будем получать для модели значение критической силы Эйлера.

Изменения алгоритма расчета позволили внести соответствующие изменения в [7].

Отметим, что в работах [5, 7], выполненных в середине 80-х годов, учет момента M_2^T выполнялся в рамках непосредственного вывода формул для ПО. Такой учет приводил к более громоздким выкладкам, чем учет коррекции инерционной характеристики, предложенный выше.

УЧЕТ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В НЕПРИЗМАТИЧЕСКОМ ПРЯМОЛИНЕЙНОМ ТРУБОПРОВОДЕ

В качестве очередного примера применения предложенного подхода [11], была решена задача из [19] о вибрации прямолинейного трубопровода, по которому с заданной скоростью движется идеальная жидкость. В качестве физической модели трубопровода был использован плоский вариант квазиодномерной конечно-элементной модели. При разработке математической модели задачи применен метод кинетостатики [16]; при таком подходе к действующим на механическую систему (трубопровод и жидкость) задаваемым гармонически изменяющимся во времени усилиям следует добавить соответствующие силы инерции, а модель трубопровода можно рассматривать как находящуюся в равновесии. Рассмотрение процесса вынужденных установившихся

колебаний (вибрации), при котором все параметры изменяются во времени по моногармоническому закону, позволяет при получении математической модели воспользоваться квазистатической аналогией [1, 3, 4, 6, 10]. Задача о вычислении параметров движения системы сводится к задаче о вычислении параметров её деформированного состояния при статическом действии амплитудных значений вынуждающих усилий. Выполнение расчетов в комплексных числах позволит учесть наличие внутренних и внешних линейно-вязких сопротивлений комплексностью характеристик жесткости квазистатической модели [1, 3, 4, 6, 10]. Анализ выражений для составляющих сил инерции позволил сделать следующие выводы:

- изменение массы элемента модели трубопровода на величину массы расположенного внутри него элемента жидкости приведет к *коррекции* величины соответствующей инерционной характеристики (его массы) и, как следствие, к *коррекции* отрицательной жесткости соответствующей упругой опоры квазистатической модели трубопровода;
- учет сил инерции Кориолиса требует оснащения используемой квазиодномерной модели ранее отсутствовавшим свойством — поворот элемента вокруг бинормали должен вызывать появление поперечной силы, пропорциональной угловой скорости этого поворота.

Очевидно, что оснащение модели трубопровода опорой с такими свойствами приведет к *модификации* инерционных свойств ее элементов, что, в свою очередь, приведет к введению в каждый базовый элемент квазистатической модели упругой опоры, поперечная реакция которой будет зависеть от угла поворота элемента. При этом жесткость этой опоры будет величиной мнимой, т.к. возникающая поперечная сила зависит от скорости изменения угла поворота элемента. С формулами для вычисления ПО и ПП рассмотренных нагрузок можно ознакомиться в [20].

Действие слагаемого, содержащего радиус кривизны нейтральной оси прямолинейного трубопровода, был учтен *непосредственно при выводе формул* для парциальных откликов и парциальных параметров при «прохождении» подэлемента длиной l . С формулами для вычисления ПО и ПП рассмотренных нагрузок можно ознакомиться в [21]. Полученные выражения позволили выполнить очередную модернизацию расчетной программы [9].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предложенном материале изложен подход, позволяющий в случае моделирования конструкций системами квазиодномерных конечно-элементных моделей, рассчитывать параметры их статического деформирования и (или) связанных изгибно-продольно-крутильных установившихся колебаний (вибрации) более просто и быстро. Применение предложенного подхода проиллюстрировано на ряде задач прикладного характера.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Вклад авторов. Армен Л. Мелконян — написание текста рукописи, редактирование текста рукописи, создание изображений, экспертная оценка, утверждение финальной версии рукописи; Дмитрий А. Николаев — поиск публикаций по теме статьи, редактирование текста рукописи, создание изображений, утверждение финальной версии рукописи. Все авторы одобрили рукопись (версию для публикации) и согласились нести ответственность за все аспекты работы, гарантируя надлежащее рассмотрение и решение вопросов, связанных с точностью и добросовестностью любой ее части.

Источники финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

Конфликт интересов. Авторы гарантируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Оригинальность. При создании настоящей работы авторы не использовали ранее опубликованные сведения (текст, иллюстрации, данные).

Генеративный искусственный интеллект. При создании настоящей статьи технологии генеративного искусственного интеллекта не использовались.

Рассмотрение и рецензирование. Настоящая работа подана в журнал в инициативном порядке и рассмотрена по обычной процедуре.

В рецензировании участвовали один рецензент, член редакционной коллегии и научный редактор издания.

ADDITIONAL INFORMATION

Author contributions: Armen L. Melconian: writing—original draft, writing—review & editing, visualization, expert review, validation; Dmitry A. Nikolaev: investigation, writing—review & editing, visualization, validation. All the authors approved the version of the manuscript to be published and agree to be accountable for all aspects of the work, ensuring that questions related to the accuracy or integrity of any part of the work are appropriately investigated and resolved.

Funding sources: No funding.

Disclosure of interests: The authors have no relationships, activities, or interests for the last three years related to for-profit or not-for-profit third parties whose interests may be affected by the content of the article.

Statement of originality: No previously obtained or published material (text, images, or data) was used in this study or article.

Generative AI: No generative artificial intelligence technologies were used to prepare this article.

Provenance and peer review: This paper was submitted unsolicited and reviewed following the standard procedure. The peer review process involved one reviewer, a member of the editorial board, and the in-house scientific editor.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В.Л., Матлах А.П., Поляков В.И. Борьба с вибрацией на судах. СПб.: МорВест, 2005. EDN: QNSOHV
2. Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в строительной механике корабля. Л.: Судостроение, 1974.
3. Чувиковский В.С. Численные методы в строительной механике корабля. Л.: Судостроение, 1976.
4. Мелконян А.Л. Математическая модель для исследования связанных изгибно-продольных вынужденных колебаний плоско-криволинейной упругой конструкции при наличии статической продольной нагрузки. Деп. ВИНТИ, 1987. № 7692-B87.
5. Мелконян А.Л. Алгоритм расчета связанных изгибно-продольных вынужденных установившихся колебаний плоско-криволинейной упругой дискретной системы при наличии статической продольной нагрузки. Деп. ВИНТИ, 1988. № 367-B88.
6. Николаев Д.А. Математическая модель пространственных изгибно-продольно-крутильных колебаний корпуса как непризматической балки с криволинейными несовпадающими линиями центров жесткости на изгиб и кручение. В кн.: Труды ЛКИ. Применение численных методов в расчетах судовых конструкций. 1986. С. 50–55.
7. Николаев Д.А. Алгоритм расчета связанных изгибно-продольно-крутильных колебаний пространственно-криволинейных упругих систем. Деп. ЦНИИ РУМБ, 1986. № ДР 2494.
8. Мелконян А.Л., Николаев Д.А. Квазидвумерные модели для анализа параметров вибрации судового корпуса на ранних стадиях его проектирования // Морские интеллектуальные технологии. 2019. № 2(44). С. 45–51. EDN: WADFQY
9. Расчёт балок и рам. Использование метода парциальных откликов. [internet] Дата обращения: 17.11.2024. Режим доступа: <http://www.d-nik.de>
10. Мелконян А.Л., Черныш А.А. Колебания линейных механических систем. Л.: СПбГМТУ, 2019.
11. Мелконян А.Л., Николаев Д.А. Модификация инерционно-жесткостных характеристик модели как путь решения задач о ее установившихся колебаниях // Морские интеллектуальные

технологии. 2020. № 1(47). С. 12–19. doi: 10.37220/MIT.2020.47.1.037 EDN: DWZCCE

12. Бабанин Н.В., Мелконян А.Л. Комплексное представление усилий при расчете параметров вынужденных установившихся колебаний // Труды СПбГМТУ. 2024. № 1(9). С. 14–23. EDN: LQKHKK

13. Чувиковский В.С., Мелконян А.Л. Совместная вынужденная вибрация судового корпуса и его перекрытий // Судостроение. 1986. №8 (585). С. 5–6.

14. Мелконян А.Л., Николаев Д.А. Совместная вибрация судового корпуса и конструктивного модуля с малым районом сопряжения // Морской Вестник. 2022. № 1(81). С. 24–26. EDN: GVHBYK

15. Гежа Д.В., Мелконян А.Л., Николаев Д.А. Расчет параметров вибрации валопровода с учетом вращения гребного винта // Труды Крыловского государственного научного центра. 2022. № S1. С. 105–112. doi: 10.24937/2542-2324-2022-1-S-1-105-112 EDN XCFQBF

16. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. В 2-х т. СПб: Лань, 2023.

17. Диментберг Ф.М. Изгибные колебания вращающихся валов. М.: Изд-во Академии Наук СССР, 1959

18. Гежа Д.В., Мелконян А.Л., Николаев Д.А. Оценка влияния силы упора вращающегося винта на параметры вибрации валопровода // Морские интеллектуальные технологии. 2022. № 2-2(56). С. 53–58. doi: 10.37220/MIT.2022.56.2.041 EDN RZLDKY

19. Светлицкий В.А., Стасенко И.В. Сборник задач по теории колебаний. Москва: Высшая школа, 1979.

20. Мелконян А.Л., Николаев Д.А., Чуклин М.В. Расчет параметров вынужденных установившихся колебаний трубопровода // Морские интеллектуальные технологии. 2021. № 1-2(51). С. 51–59. doi: 10.37220/MIT.2021.51.1.025 EDN WSAQAM

21. Мелконян А.Л., Николаев Д.А., Яремчук С.А. Расчет параметров вибрации трубопровода без выполнения последовательных приближений // Морские интеллектуальные технологии. 2024. № 3-2(65). С. 94–101. doi: 10.37220/MIT.2024.65.3.012 EDN XMYMPW

REFERENCES

1. Aleksandrov VL, Matlah AP, Poljakov VI. *Combating vibration on ships*. Sankt Petersburg: MorVest; 2005. (In Russ.) EDN: QNSOHV
2. Postnov VA, Xarkhurim IY. *Finite element method in calculations of ship structures*. Leningrad: Sudostroenie; 1974. (In Russ.)
3. Chuvikovskij VS. *Numerical methods of calculations in ship structural mechanics*. Leningrad: Sudostroenie; 1976. (In Russ.)
4. Melkonian AL. Mathematical model for the study of coupled flexural-longitudinal forced vibrations of a plane-curvilinear elastic structure in the presence of a static longitudinal load. VINITI; 1987. 692-V87. (In Russ.)
5. Melkonian AL. Algorithm for calculating coupled flexural-longitudinal forced steady oscillations of a plane-curvilinear elastic discrete system in the presence of a static longitudinal load. VINITI; 1988. 367-V88. (In Russ.)
6. Nikolaev DA. Mathematical model of spatial bending-longitudinal-torsional vibrations of the body as a non-prismatic beam with curved non-coinciding lines of the centers of rigidity for bending and torsion. *Trudy LKI*. 1986;50–55. (In Russ.)
7. Nikolaev DA. Algorithm for calculating coupled bending-longitudinal-torsional vibrations of spatially curvilinear elastic systems. CSRI Rumb; 1986. № DR 2494. (In Russ.)
8. Melkonian AL, Nikolaev DA. Quasi-one-dimensional models for the analysis of ship hull vibration parameters at early stages of its design. *Morskie intellektual'nye tehnologii*. 2019;2(44):44–51. (In Russ.) EDN: WADFQY
9. Calculation of beams and frames. Using the partial response method. [internet] Accessed: 17.11.2024. Available from: <http://www.d-nik.de>
10. Melkonjan AL, Chernish AA. *Vibrations of linear mechanical systems*. Sankt Petersburg: SPbGMTU; 2019. (In Russ.)
11. Melkonjan AL, Nikolaev DA. Modification of inertial-rigidity characteristics of a model as a way to solve problems about its steady-state oscillations. *Morskie intellektual'nye tehnologii*. 2020;1(3):12–20. (In Russ.) doi: 10.37220/MIT.2020.47.1.037 EDN: DWZCCE
12. Babanin NV, Melkonyan AL. Complex representation of efforts in calculating the parameters of forced steady-state vibrations. *SMTU Transactions*. 2024;1(9):14–23. (In Russ.) EDN: LQKHKK
13. Chuvikovskij VS, Melkonjan AL. Combined forced vibration of the ship's hull and its floors. *Sudostroyeniye*. 1986;8(585):5–6. (In Russ.)
14. Melkonian AL, Nikolaev DA. Joint vibration of the ship's hull and structural modules with a small interface area. *Morskoy Vestnik*. 2022;1(81):53–58. (In Russ.) EDN: GVHBYK
15. Gezha DV, Melkonyan AL, Nikolaev DA. Calculation of vibration parameters of the shaft line taking into account the rotation of the propeller. *Transactions of the krylov state research centre*. 2022;S1:105–112. (In Russ.) doi: 10.24937/2542-2324-2022-1-S-I-105-112 EDN XCFQBF
16. Butenin NV, Lunts YL, Merkin DR. *Course of theoretical mechanics*. 2 vols. Sankt Petersburg: Lan'; 2023. (In Russ.)
17. Dimentberg FM. *Bending vibrations of rotating shafts*. Moscow: AN SSSR; 1959. (In Russ.)
18. Gezha DV, Melkonyan AL, Nikolaev DA. Evaluation of the influence of the thrust force rotating screw on vibration parameters shafting. *Morskie intellektual'nye tehnologii*. 2022;2(56):53–58. (In Russ.) doi: 10.37220/MIT.2022.56.2.041 EDN RZLDKY
19. Svetlickij VA, Stasenko IV. *Collection of problems on the theory of oscillations*. Moscow: Vysshaya shkola; 1979. (In Russ.)
20. Melkonjan AL, Nikolaev DA, Chuklin MV. Calculation of parameters of forced steady-state vibrations of a pipeline. *Morskie intellektual'nye tehnologii*. 2021;1(2):51–59. (In Russ.) doi: 10.37220/MIT.2021.51.1.025 EDN WSAQAM
21. Melkonyan AL, Nikolaev DA, Yaremchuk SA. Calculation of pipeline vibration parameters without successive approximations. *Morskie intellektual'nye tehnologii*. 2024;3(65):94–101. (In Russ.) doi: 10.37220/MIT.2024.65.3.012 EDN XMYMPW

ОБ АВТОРАХ

* Мелконян Армен Леонович,

канд. техн. наук, доцент, профессор кафедры теоретической механики и сопротивления материалов, Санкт-Петербургский государственный морской технический университет;
адрес: Россия, 190121, Санкт-Петербург, ул. Лощманская, д. 3;
eLibrary SPIN: 3789-4157;
e-mail: mel1950@mail.ru

Николаев Дмитрий Александрович,

канд. техн. наук, пенсионер;
e-mail: D.Nikolaev@d-nik.de

AUTHORS' INFO

* Armen L. Melconian,

Cand. Sci. (Engineering), associate professor, professor of theoretical mechanics and material strength department, Saint Petersburg State Marine Technical University;
address: 3 Lotsmanskaya st, Saint Petersburg, 190121, Russia;
eLibrary SPIN: 3789-4157;
e-mail: mel1950@mail.ru

Dmitry A. Nikolaev,

Cand. Sci. (Engineering), pensioner;
e-mail: D.Nikolaev@d-nik.de

* Автор, ответственный за переписку / Corresponding author